

# МКЭД, ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ, МЫСЛЕННЫЕ И АНАЛОГОВЫЕ МОДЕЛИ И ИХ РАЗВИТИЕ

Данил ДУБОШИНСКИЙ

QUANTIX RD&TV – Компания в области исследований и развития вибрационной техники

Контакт с автором: [doubochinski.danil@gmail.com](mailto:doubochinski.danil@gmail.com)

## Резюме

Работа посвящена модельному обоснованию Макрофизического квантового эффекта, открытого в 1968 году Данилом и Яковом Дубошинскими (МКЭД).

Открытию предшествовало изучение с единых позиций теории колебаний известных в технике ускорения заряженных частиц, электронике СВЧ, механике, оптике и акустике процессов и явлений, основанных на использовании инерционных свойств заряженных частиц.

Выявленные при этом общие признаки и свойства механизмов, обеспечивающие взаимодействие заряженных частиц с быстропеременными полями, позволили сформулировать новый, ранее не рассматривавшийся, механизм преобразования энергии внешней высокочастотной силы в собственные низкочастотные колебания макрофизических систем, а затем осуществить переход к построению сначала качественных моделей и вслед за этим реальных действующих устройств.

## Введение

Современная радиофизика и радиотехника развивались на основе работ М. Фарадея, К. Максвелла и Г. Герца, совершивших переворот в представлениях об электрических явлениях, предсказавших и доказавших существование электромагнитных волн.

С развитием радиофизики в области электроники сверхвысоких частот, ускорителей заряженных частиц, оптике, акустике и других областях науки и техники был открыт ряд явлений, основанных на использовании инерционных свойств заряженных частиц [1, 5, 8 - 12].

Основная идея, приведшая нас к открытию КМЭД, заключалась в применении и использовании свойств инерционности и определенного вида синхронизации для сверхвысоких частот для получения аналогичных эффектов при работе с макрофизическими колебательными системами.

Известно, что рассмотрение указанных процессов и явлений с единых позиций теории колебаний, конкретизация физической сущности механизмов взаимодействия, реализуемых в них, способствовали развитию механики, электромеханики, радиотехники и других отраслей науки и техники. Так, например, использование явлений, наблюдаемых в приборах СВЧ и в ряде других устройств, позволило изучать процессы взаимодействия волн с отдельными резонаторами. В литературе [2 - 6] с помощью этих явлений объясняется работа акустических устройств (свистков, сирен и т.п.), образование волн на поверхности воды от ветра, происхождение грозы и ряд других явлений. В этих работах отмечается, что возбуждение электромагнитной волной отдельного резонансного контура легче всего понять, если рассматривать возбуждение контура модулированным по плотности электронным потоком. Такой подход к использованию аналогий с явлениями,

наблюдаемыми в приборах СВЧ, ускорителях заряженных частиц и в ряде других электронных устройств, обратил наше внимание на то обстоятельство, что таких исследований оказалось очень немного.

Таким образом, отправным моментом наших исследований явилось изучение указанных выше различных физических явлений с позиций анализа и синтеза объединяющих их признаков и закономерностей.

В соответствии с тематикой настоящей работы это означает, что с точки зрения теории колебаний процессы, некоторые из которых приведены ниже, будут рассмотрены по аналогии с процессами в колебательных системах с ограниченным числом степеней свободы.

## **1. Обзор тождественных явлений**

### **Колебания Баркгаузена [5].**

К 1919 г. в работах Г. Баркгаузена, И. Курца и других исследователей намечалось развитие способа генерирования сверхвысокочастотных колебаний, в основе которого лежали совершенно новые принципы.

Механизм колебательного движения электронов, благодаря которому возникала генерация сверхвысоких частот, был получен Г. Баркгаузенем, К. Курцем, а затем С.И. Зилитинкевичем в обычной трехэлектродной лампе с сеткой\*, имеющей положительный потенциал, и анодом, находящимся при нулевом или отрицательном потенциале по отношению к катоду. Электроны, испускаемые катодом, разгоняются полем сетки и частично ею захватываются, однако большая часть их, благодаря инерции, проходит через отверстия сетки в направлении анода. В тормозящем поле анода электроны начинают замедляться и возвращаются к сетке. Подобное явление происходит также и со стороны катода, где большая часть электронов, не захваченная сеткой, попадает в тормозящее поле катода и движется обратно к сетке.

Уже в первом сообщении о своем генераторе Г. Баркгаузен и К. Курц отмечали условие поддержания генерации [5]: в механическое движение зарядов должен быть внесен некоторый порядок с тем, чтобы многие электроны имели одинаковую фазу движения. Причем этот порядок должен поддерживаться самим движением электронов.

Порядок у колеблющихся вокруг сетки электронов, который предположили Баркгаузен и Курц, означал не что иное, как группировку электронов, а механизм поддержания этого порядка заключался в изменении их скорости (времени) движения под действием поля сетки.

Появившиеся в последующее время приборы СВЧ практически все применяли механизм группировки электронов [8].

Одно из объяснений работы генераторов сводится к тому, что электроны, имеющие фазу невыгодную с точки зрения поддержания колебаний (неправильнофазные электроны), а, следовательно, поглощающие энергию колебательного контура, будут раскачиваться переменным полем сетки и быстро достигнут анода. В то же время правильнофазные электроны,

---

\* Последующие исследования отмечали, что временные и энергетические соотношения, имеющие место в этих устройствах, аналогичны зависимости периода обращения спутника Земли от его энергии [7].

сообщающие энергию колебательному контуру, будут тормозиться переменным полем и колебаться вокруг сетки более значительное время.

Процесс фазовой селекции приводит к увеличению энергии высокочастотного поля в том случае, когда электроны неправильной фазы удаляются, так что электроны правильной фазы преобладают. В последующие годы был предложен ряд приборов СВЧ, работа которых была основана на механизме фазовой селекции [9 - 11].

С единой точки зрения механизм взаимодействия в приборах СВЧ характеризуется нелинейным характером приложения внешней высокочастотной силы по координате движения заряженных частиц (например, сила приложена на части траектории движения частиц) [4]. Именно такой механизм взаимодействия обеспечивает фазовую селекцию и группировку заряженных частиц.

Единство рабочего механизма подтверждается наличием общих для всех генераторов свойств и характеризующих их соотношений. К наиболее известным соотношениям относится, выполняющееся для всех генераторов электронных колебаний, «уравнение Баркгаузена»:

$$\lambda^2 U = const,$$

где  $\lambda$  – длина генерируемой волны,  $U$  – приложенное к прибору ускоряющее напряжение.

Причем это соотношение понимается не как непрерывная зависимость между напряжением и квадратом длины волн, а как связь этих величин, характеризующая оптимальные условия возбуждения электронных колебаний в данном приборе.

Важной особенностью электронных колебаний в триодах по схемам Баркгаузена – Курца, Жилля – Морелля и другим является наличие режимов, при которых возможна генерация кратных частот, то есть для одних и тех же ламп, при одних и тех же напряжениях на всех электродах были обнаружены генерируемые электрические напряжения различных частот.

В таблице, приведенной в монографии [11], напряжению 370 В, соответствуют длины волн 55,5 см; 33,6 см и 17,3 см. Из таблицы следует, что одни и те же генерируемые по частоте напряжения могут быть осуществлены при существенно различных напряжениях на сетке. Так, при напряжении близком к 450 В и при 190 В, может генерироваться излучение длиной волны 48 см; при напряжениях в 240 В и 270 В генерируется излучение длиной волны около 40 см.

Перечисленные примеры подчеркивают тот факт, что электроны, колеблющиеся с одними и теми же амплитудами около сетки, могут генерировать существенно различные напряжения по частоте. С другой стороны одни и те же генерируемые напряжения могут быть достигнуты при значительно отличающихся друг от друга амплитудах колебаний электронов. Существенной особенностью электронных колебаний является устойчивость взаимодействия и генерации электрических напряжений.

В каждом конкретном режиме механизм взаимодействия проявляется по-разному (модуляция, группировка). Однако, в основе этих механизмов можно

проследить единый принцип : ***высокочастотная внешняя сила действует нелинейно по координате движения электронов.***

### **Вибратор Герца.**

Исторически возбуждение колебаний при помощи частиц, движущихся в одном направлении, было осуществлено значительно раньше, чем генерация высокочастотных колебаний Баркгаузена. Принято считать, что впервые такие колебания наблюдались Г. Герцем [11 - 14]. Однако, поскольку до настоящего времени нет исчерпывающей теории описываемых явлений, вибратор Герца часто исключают из рассмотрения как генерирующее устройство.

Вибратор Герца имеет не только исторический интерес. Простота генерации и тот факт, что без вакуума достижимо получение искрового разряда в сотни ампер имеют большое научное и практическое значение. Реализация этих преимуществ вибратора Герца станет возможной лишь тогда, когда будет построена его теория.

На неудовлетворительность объяснения работы вибратора Герца указывают следующие основные опытные факты : интенсивность излучения вибратора не соответствует расчетной; излучение наблюдается при строго определенных значениях искрового промежутка ; при одних и тех же геометрических размерах вибраторов замена материала электродов влияет на частоту и интенсивность излучения.

Наиболее тщательно вибратор Герца исследовался М. Вином и Д.А. Рожанским [12, 13], которые пришли к выводу о несостоятельности общепринятой теории вибратора. В тщательных экспериментах, проведенных М. Вином с различными материалами электродов вибратора и влиянием этих электродов на частоту и интенсивность излучаемых электрических колебаний, была получена целая последовательность металлов, которая не могла быть сопоставлена ни с какой другой последовательностью.

Еще более повысил точность эксперимента Д.А. Рожанский, который работая в другом частотном диапазоне, осциллографируя излучения вибратора Герца при неизменных параметрах разрядного промежутка и других условиях, подтвердил результаты М. Вина и дополнил ряд металлов [13].

На основании своих исследований Д.А. Рожанский пытался объяснить работу вибратора Герца процессами, происходящими в разрядном промежутке. Им впервые для разрядного промежутка был проанализирован интеграл мощности и указано, что все дело заключается в несоответствии изменения тока и напряжения при генерации вибратора.

Исследования Д.А. Рожанского позволили ему в начале 20-х годов выдвинуть ряд интересных и далеко идущих идей в использовании инерционных свойств электрических зарядов для возбуждения электрических колебаний. Физический смысл одной из идей заключался в том, чтобы максимальным образом тормозить заряженные частицы, длительно летящие в высокочастотном поле, используя инерционность зарядов].

Первые работы по осуществлению идей Д.А. Рожанского были проведены в Ленинградском электрофизическом институте, а затем в Ленинградском физикотехническом институте. В результате исследований была предложена

конструкция прибора, являющегося прообразом современного клистрона. В 1935 году А.Н. Арсеньева [15] опубликовала статью, в которой были изложены теоретические обоснования нового принципа генерации, предложенного Д.А. Рожанским.

Рассмотрим работу более простого устройства – одноконтурного клистрона. В 1939 году Ф. Левелин [14, 16] рассчитал и сконструировал устройство, в котором энергия потока электронов в двухэлектродном промежутке преобразовывалась в энергию поля СВЧ. В этой конструкции электронный поток вводится в резонатор, образованный двумя цилиндрическими проводниками, вложенными друг в друга. Поверхность наружного цилиндра является катодом, имитирующим электроны. Поверхность внутреннего цилиндра играет роль анода. В части поверхности наружного цилиндра расположен подогреватель. Этот электронно-лучевой диод или монотрон был использован в качестве генератора в десятисантиметровом диапазоне электромагнитных волн. При рабочем токе, равном 110 мА, и постоянном напряжении равном 210 В, выходная мощность составляла 300 мВт.

В описанной конструкции электроны вылетают с катода и начинают движение в сторону анода с нулевой скоростью. В других конструкциях монотронов резонатор может пронизываться электронным потоком. При этом начальная скорость движения электронов в зоне взаимодействия значительна, благодаря чему увеличивается к.п.д. устройства. Электронный поток в таких конструкциях движется между сетками резонатора.

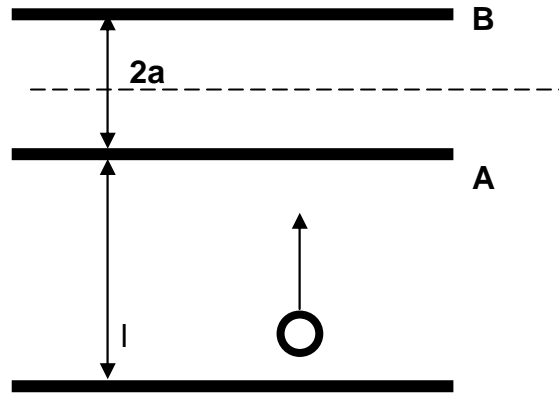
Особенности механизма возбуждения монотронов практически не отличаются от взаимодействий, имеющих место в других приборах СВЧ, и заключаются в том, что **электронный поток взаимодействует с высокочастотным полем на части траектории своего движения.**

### Ускорение Ферми

Объясняя происхождение быстрых частиц космических лучей, Ферми [17,18] предложил механизм, смысл которого заключается в том, что частица, сталкиваясь со случайными объектами, в среднем ускоряется. Механизм ускорения объясняется следующим образом. При единичных актах соударения частица приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движется объект навстречу частице или от нее. Если скорости тел, с которыми сталкивается частица, распределены хаотически, то можно сказать, что число тел, движущихся навстречу частице, примерно равно числу тел, удаляющихся от нее. Это сразу же означает, что столкновений будет больше с телами, скорость которых направлена навстречу частице, что приведет к росту, в среднем, энергии частицы [17].

Принципы взаимодействия, положенные в основу механизма Ферми, оказались характерными для большого класса задач. К ним относятся исследования механизмов взаимодействия заряженных частиц в приборах СВЧ и в различных ускорителях, процессы удержания плазмы магнитными полями и другие.

В ряде работ [18-24] исследовался простейший случай ускорения Ферми – движение легкой частицы между двумя параллельными плоскостями, одна из которых колеблется по определенному, строго периодическому закону (Фиг. А).



Фигура А

### Модель для изучения механизма ускорения Ферми

С. Улам [19, 22, 25] численно (с помощью ЭВМ) исследовал эту модель в предположении, что удары при столкновении шарика с плоскостями происходят по закону абсолютно упругих ударов и фазы при взаимодействиях распределены равномерно. Расчеты показали, что при неограниченно большом количестве столкновений появляются зоны, где скорость шарика увеличивается в 3 - 4 раза, и зоны, где скорость шарика уменьшается до первоначальной скорости и ниже. Скорость шарика сильно флуктуирует то в сторону увеличения, то в сторону уменьшения и, в результате, при  $t \rightarrow \infty$  средняя энергия шарика не увеличивается.

Г.М. Заславским и Б.В. Чириковым [21, 23, 24] на аналогичной модели (Фиг. А) исследовался механизм ускорения Ферми в одномерном случае в предположении, что в течение каждого полупериода скорость подвижной плоскости линейно меняется со временем. Движение шарика описывается следующей точной системой разностных уравнений :

$$v_{n+1} = \pm v_n + V(\psi_n - \frac{1}{2}); \quad (I)$$

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2v_{n+1}}{V} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{2v_{n+1}}{V}\right)^2 + \frac{4\phi_n v_{n+1}}{V}} \quad \left(v_{n+1} > \frac{V\psi_n}{4}\right); \quad (II)$$

$$\psi_{n+1} = 1 - \psi_n + \frac{4v_{n+1}}{V} \quad \left(v_{n+1} \leq \frac{V\phi_n}{4}\right); \quad (III)$$

$$\phi_n = \frac{\left\{ \psi_n + \left[ \psi_n(1 - \psi_n) + \frac{l}{4a} \right] \right\} V}{4v_{n+1}}, \quad (IV)$$

где :  $v_n$  – скорость частицы ;  $n$  – номер соударения с движущейся плоскостью ;  $V/4$ – амплитуда скорости подвижной плоскости в момент удара, которая изменяется от 0 до  $1/2$  при движении плоскости из положения А в В и от  $1/2$  до 1 при обратном движении (Фиг. А); скобки {...} означают дробную часть аргумента. Знак плюс в формуле (I) соответствует формуле (II) на предыдущем шаге, знак минус – формуле (III).

Рассмотрен случай, когда

$$\frac{l}{a} \gg 1, \quad \frac{v_n}{V} \gg 1. \quad (V)$$

Тогда система уравнений (I-IV) принимает вид :

$$\Delta v(n) \equiv v_{n+1} - v_n = \frac{V}{\Psi_n - \frac{1}{2}}, \quad (VI)$$

$$\Psi_{n+1} \approx \Phi_n \approx \left\{ \Psi_n + \frac{lV}{16av_{n+1}} \right\},$$

и при

$$\frac{lV}{16av_{n+1}} \ll 1, \quad (VII)$$

система (VI) заменяется дифференциальными уравнениями

$$v'(n) = V \left( \Psi(n) - \frac{1}{2} \right), \quad (VIII)$$

$$\Psi'(n) = \frac{lV}{16av_{n+1}},$$

где штрих означает дифференцирование по  $n$ , играющему роль безразмерного времени. Система (VIII) исследуется с помощью фазового уравнения :

$$\Phi'' + \Omega^2 \Phi = 0, \quad (IX)$$

где  $\Phi = \Psi - \frac{1}{2}$  и  $\Omega^2 = \frac{lV^2}{16av^2(n)}$ .

Из условия (V) видно, что скорость изменяется незначительно и в первом приближении можно считать, что  $\Omega$  – постоянная величина. При таком предположении из (VIII) и (IX) следует, что скорость совершает малые колебания с амплитудой  $\sim v_0 / \sqrt{a/l}$  около начального значения скорости  $v_0$  с частотой  $\Omega$ .

Б. В. Чириковым [21] исследовалась система, аналогичная (VIII), и было показано, что при условии

$$\Omega^2 \gg 1 \quad (X)$$

изменение скорости  $v$  становится стохастическим.

Для определения критерия стохастичности рассматривается корреляция фаз  $\Psi_n$  и  $\Psi_{n+1}$  по формуле :

$$\rho = \frac{\left\langle \left( \Psi_{n+1} - \frac{1}{2} \right) \left( \Psi_n - \frac{1}{2} \right) \right\rangle}{\left\langle \left( \Psi_n - \frac{1}{2} \right)^2 \right\rangle}, \quad (XI)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по фазе ( $\Psi_n$ ).

Учитывая (VI) и предполагая эргодичность движения, получают :

$$\begin{aligned} &\text{при } \Omega^2 \gg 1 \\ \rho &\approx \frac{1}{k} [1 - 6\Theta(1 - \Theta)] \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

$$\begin{aligned} &\text{при } \Omega^2 \ll 1 \\ \rho &\approx 1 - 6\Theta(1 - \Theta) \sim 1, \quad \text{где } \Theta = \frac{IV}{16av \cdot \left(1 + \frac{V}{2v}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{XIII})$$

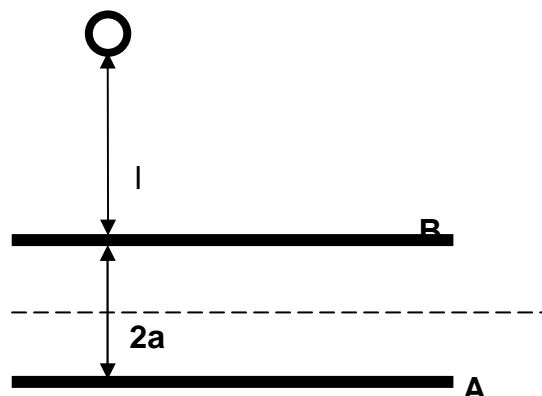
Условие (XII) означает, что корреляция практически отсутствует, то есть  $v$  изменяется стохастически; условие (XIII) означает, что между соседними фазами имеется сильная корреляция и стохастичность отсутствует.

Проведенные Г.М. Заславским и Б.В. Чириковым [21, 23, 24] исследования показали, что существуют три качественно различных области скоростей шарика :

$$\text{I. } v \leq \frac{1}{4}V\sqrt{\frac{l}{a}}; \quad \text{II. } V\sqrt{\frac{l}{a}} < v < \frac{Vl}{16a}; \quad \text{III. } v \geq \frac{Vl}{16a}.$$

В области I действует механизм Ферми; в области III скорость шарика совершает устойчивые малые колебания; область II – промежуточная. В процессе движения шарик может переходить из области I в II и обратно : область III полностью изолирована.

Г. М. Заславским [23] была исследована модель, представляющая собой шарик, который бросают вертикально вниз на массивную плиту (Фиг. В), совершающую периодические колебания Низ - Верх – Низ - Верх... . Шарик взаимодействует с плитой по закону абсолютно упругого удара. Предполагается, что масса плиты бесконечно большая, амплитуда колебаний плиты равна единице, скорость плиты все время постоянна по величине и меняет только направление. Было обнаружено две области изменения скоростей шарика : область, соответствующая увеличению скорости шарика, и область, где скорость шарика совершает устойчивые малые колебания.



**Фигура В**

**Модель для изучения механизма ускорения Ферми**

В большинстве работ, посвященных изучению механизма ускорения Ферми, исследуются взаимодействия шарика для простейших случаев периодических



движений плоскости (в основном, пилообразные колебания) в предположении, что столкновения шарика и плоскости происходят по закону абсолютно упругих ударов.

С. Уламом [22] рассматривалась задача для случая абсолютно неупругих столкновений. Однако, при этом изучался вопрос образования сгущений и крупных скоплений частиц.

В последнее время рассматривается принципиальная возможность использования механизма Ферми для ускорения космических ракет в гравитационном поле планет или звезд. В одной из работ предлагается рассмотреть взаимодействие объекта с магнитными полями звезд, которые движутся случайным образом и при взаимодействиях передают часть своей энергии объекту (например, заряженной частице). В другой предлагаемой модели предполагается, что объект движется в непрерывных и меняющихся магнитных полях и при взаимодействии получает от них энергию. С. Улам писал: «Эту последнюю модель гораздо труднее свести к какой-либо простой схематической задаче...; возможно, однако, что она могла бы обеспечить более эффективные пути снабжения частицы очень большой энергией».

Анализ литературы показал, что в большинстве работ исследуются модели, в которых движение частицы (шарика) возбуждается ударами.

Имеющиеся в настоящее время данные не позволяют дать однозначный ответ на вопрос о том, каковы условия взаимодействия, при которых будет происходить рост, в среднем, энергии частицы.

Это следует объяснить тем, что положенные в основу ряда работ физические представления несколько схематичны, тогда как физические представления, положенные Ферми в основу механизма ускорения, вполне конкретны и предполагают непосредственно преимущественность вклада энергии.

Таким образом, при исследовании механизма ускорения Ферми, представляет интерес изучение колебаний в системе с одной степенью свободы, возбуждаемых периодическими импульсами, источником которых является гармоническая сила, частота которой не кратна и в общем случае несоизмерима с собственной частотой колебаний системы (несоизмеримость частот следует из условия равномерности влета шарика в любую фазу колебаний плоскости).

Полученные различными учеными результаты позволили выявить основные условия, при которых протекают процессы, аналогичные механизму ускорения Ферми :

- ***динамическая система должна быть нелинейной ;***
- ***частота воздействующей силы должна значительно превышать частоту, с которой колеблется частица (шарик) ;***
- ***колебательная система должна иметь минимум степеней свободы, с противным же случае, может происходить обмен энергией между степенями свободы ;***
- ***воздействие на колебательную систему происходит на части ее траектории движения, то есть нелинейно по координате.***

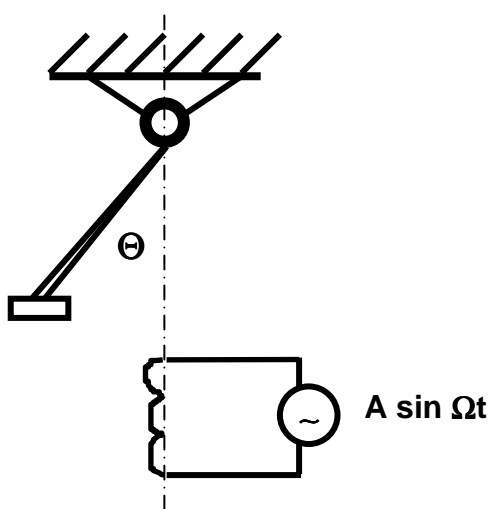
С. Улам (один из сотрудников Э. Ферми) причислил проблему ускорения к одной из нерешенных задач в математике [25]. К этому выводу Улам пришел после многочисленных численных экспериментов на ЭВМ.

## Маятник Рокара [26]

В период 40-50-х годов активно велась дискуссия по проблеме, связанной с поддержанием механических незатухающих колебаний переменным током.

Суть обсуждавшейся проблемы заключалась в следующем. Если маятник, на свободном конце которого закреплен кусочек ферромагнита, помещен относительно индуктивной катушки  $L(\theta)$ , питающейся переменным током, таким образом, как показано на Фиг. 1, часто наблюдается, что он начинает колебаться в устойчивом режиме.

Ряд попыток объяснить этот факт не внес ничего нового в раскрытие физической природы наблюдаемого явления. И только Рокару удалось сформулировать на физической основе явления дифференциальные уравнения, которые долгое время казались удовлетворительными.



Фигура 1

### Электромеханическая схема маятника Рокара

Дифференциальные уравнения Рокара имеют вид :

$$\frac{d(L(\theta)i)}{dt} + Zi = E \sin \Omega t, \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta} + D\dot{\theta} + C\theta = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{2} Zi^2 \right), \quad (2)$$

где :  $Z$ ,  $E$ ,  $J$ ,  $D$ ,  $C$  – положительные константы и  $L(\theta)$  – индуктивность, являющаяся определенной функцией  $\theta$  угла маятника,  $i$  – амплитуда тока, возбуждаемого в катушке при ее взаимодействии с ферромагнитом,  $E$  и  $\Omega$  – соответственно амплитуда и частота тока источника питания.

При этом, Рокар, при объяснении этого явления не использовал своих дифференциальных уравнений, а ограничился качественным анализом.

Отказ Рокара от исследования уравнений (1) и (2) Н. Минорский объясняет тем, что не существует точного метода интегрирования этих дифференциальных уравнений [27].

Анализируя уравнения (1) и (2), Н. Минорский рядом упрощений приводит их к уравнению, которое имеет следующий вид :

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x + (a - \alpha x^2)x \cos 2\omega t + \varepsilon x^3 = 0, \quad (3)$$

где  $x$  – координата, характеризующая смещение маятника от положения равновесия,  $\omega$  – частота колебаний маятника. Физический смысл дифференциальных уравнений Рокара Н. Минорский объясняет следующим образом. Колебания маятника изменяют индуктивность  $L(\theta)$  электрического контура и пондеромоторную реакцию, получаемую при модуляции  $L(\theta)$ , которая в свою очередь изменяет естественное движение маятника.

Такая трактовка физической сущности исследуемого явления позволила Минорскому рассматривать возникшие колебания как колебания, вызванные параметрической силой.

Далее Н. Минорский пишет [27], что несмотря на физическую простоту проблемы система дифференциальных уравнений (1) и (2) не может быть проинтегрирована точно одним из известных методов и необходимо принять ряд упрощающих предположений по следующей схеме.

Примем существование периодического решения (2) и определим решение (1) этим предположением. Это решение, замененное на (2), уменьшает его до (3), свойства которого достаточно полно исследованы в обширной литературе [27].

Суть подстановок, применяемых Н. Минорским [27], заключается в том, что при вычислении правой части уравнения (2), рассматривается выражение для определения  $\dot{x}^2$ , после ряда преобразований которого сохраняют только параметрический член с  $\theta \cos 2\omega t$ .

Следует отметить, что после 1956 года в обширной литературе по теории колебаний и ее приложениям, модель Рокара-Минорского практически не встречается.

Однако, трудности в решении данной проблемы связаны не только с отсутствием прямых методов интегрирования уравнений типа (1) - (2), но и с неточностью определения физической сущности наблюдаемых явлений. Минорский отмечает [27], что физическая природа явления так и осталась невыясненной.

Последнее обстоятельство не дает возможности правильного построения механической и аналитической моделей явления и широкого их применения. По нашему мнению, описанные выше колебания могут возникнуть не только из-за изменения индуктивности катушки. Возможны иные условия, при которых действие гармонической силы обеспечивает вклад энергии, компенсирующей потери на трение в колебательной системе.

***Важными особенностями рассматриваемых колебаний являются нелинейный характер приложения воздействующей силы по координате движения маятника, наличие одной устойчивой амплитуды колебаний маятника, высокая кратность отношения частот воздействия и установившихся колебаний маятника.***

## 2. Основные особенности взаимодействий в приборах электроники сверхвысоких частот

Остановимся подробнее на явлении группирования при движении частиц в приборах электроники СВЧ. Как мы выяснили выше, это явление, принципиально являющееся свойством больших коллективов (потоков) частиц, вызывается определенными воздействиями, которые действуют на частицы только на коротких отрезках их траекторий. Дальнейшее движение частиц происходит по инерции. Механизм этого явления целесообразно рассмотреть на простейшей модели движения частиц в вакууме, когда воздействие внешней высокочастотной силы прикладывается к частицам только в определенной точке пространства  $X = 0$ ; во всех же остальных точках траектории движения частиц никакие другие силы не действуют [15].

Воздействие состоит в том, что скорость частицы, проходящей точку  $X = 0$  в момент времени  $t$ , выражается формулой

$$v = v_0 (1 + \varepsilon \sin \Omega t), \quad (4)$$

где  $v_0$  и  $\varepsilon$  – постоянные величины и  $\varepsilon < 1$ ,  $\Omega$  – частота воздействующей силы. Дальнейшее движение частицы происходит по инерции со скоростью, описываемой выражением (4).

Рассмотрим частицы, которые пролетают точку  $X = 0$ , когда  $\varepsilon \sin \Omega t$  – монотонно возрастающая функция времени. При этом в область  $X > 0$  вначале влетают более медленные частицы, а затем быстрые. В той точке  $x = X$ , где быстрые частицы нагоняют медленные, происходит группирование. Выше точки  $x = X$  частицы разлетаются – группирование не носит устойчивого характера.

Как уже отмечалось, явление группирования положено в основу работы многих приборов электроники СВЧ и используется в некоторых типах ускорителей элементарных частиц; в ускорителях обычно высокочастотное воздействие прикладывается к частицам не в одной точке траектории, а в нескольких. При этом удается получать устойчивую группу частиц, не разрушающуюся во время движения. Механизм устойчивости, действующий в таких ускорителях был открыт в 1944 году почти одновременно В.И. Векслером и Мак-Милланом и получил название «принцип автофазировки» [29]. Для пояснения этого механизма рассмотрим ту же модель движения частиц в вакууме. Отличием будет являться только то, что высокочастотное воздействие будет прикладываться к частицам последовательно в определенных точках траектории  $x = X_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ;  $X$  – некоторое фиксированное расстояние). Причем, когда частица пролетает точку  $x = X$  в момент времени  $t$ , ее скорость изменяется скачком на величину  $\Delta v_i = \varepsilon v_0 \sin \Omega(t - \frac{ix}{v_0})$ , где  $v_0$  – начальная

скорость движения частиц, попавших в точку  $X = 0$  в моменты времени  $t_0 = \frac{\pi K}{\Omega}$  ( $K$  – целое число), не изменяется ни в одной из точек  $X$  ( $v_0 = const$ ). Такие частицы принято называть синхронными. Однако при движении возможны малые возмущения скорости. Предположим, что какая-либо из синхронных частиц прилетела в точку  $X$  немного раньше (позже) момента времени  $t_0$  в результате того, что ее возмущенная скорость стала немного больше (меньше)  $v_0$ . При этом, малое приращение скорости, которое получит частица в точке  $X$

будет отрицательно при  $K$  четном и положительно при  $K$  нечетном. Таким образом, при  $K$  четном высокочастотные воздействия направлены против возмущения и не допускают их возрастания, так что скорость синхронных частиц остается близкой к  $v_0$ , а при  $K$  нечетном действие высокочастотной силы складывается с возмущением и скорость синхронных частиц (отвечающих нечетным  $K$ ) значительно отклоняется от  $v_0$ . Рассматривая частицы, попадающие в точку  $X = 0$  в моменты близкие к  $t_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$ , нетрудно установить, что после прохождения нескольких точек  $X_i$  они образуют группу, которая при дальнейшем движении не разрушается до тех пор, пока эта группа частиц будет испытывать в точках  $X_i$  действие высокочастотной силы.

Приведенные схематические рассуждения позволяют уяснить механический смысл явлений, происходящих в потоке частиц при высокочастотных воздействиях, локализованных на траектории движения потока частиц. Ранее отмечалось также, что механизмы модуляции, группировки и автофазировки, имеющие место в электронных приборах и ускорителях заряженных частиц, обусловлены взаимодействием потока частиц с переменным полем. В механике вопросы, связанные с этими механизмами, исследовались случайным образом [93-95] и носили чисто иллюстративный характер.

Таким образом, перед нами встала задача выяснения возможности существования устойчивых периодических движений макрофизических систем, обусловленных механизмами модуляции, группирования и автофазировки. Сама идея о существовании таких макрофизических систем основывается на следующих модельных представлениях.

### **Мысленная модель**

Предположим, что вместо потока частиц, вылетающих в моменты времени  $T_i$  с модулированными начальными скоростями имеется макрофизический объект, например физический маятник, на который на части траектории его движения действует высокочастотная гармоническая сила, локализованная в определенной области, которую будем называть пространством (или зоной) взаимодействия. Воздействие этой силы на макрофизический объект соответствует тому же закону модуляции начальных скоростей, который приводит к группированию частиц в электронных приборах. В отличие от модуляции начальных скоростей частиц модуляция начальных скоростей макрофизического объекта должна выполняться через определенное время  $T$ , которое приблизительно соответствует времени пролета частиц от точки вылета до плоскости группирования. Это означает, что разным частицам будет соответствовать один и тот же макрофизический объект, но только в разные моменты времени (через промежуток времени  $T$ ), и каждый раз через промежуток времени  $T$  макрофизический объект подвергается воздействию высокочастотной гармонической силы.

Ввиду того, что закономерность периодических воздействий силы выбрана исходя из условий группирования частиц, следует ожидать существования устойчивых периодических движений макрофизической системы.

Таким образом, с точки зрения одночастотной задачи принципы взаимодействия, имеющие место в приборах СВЧ и некоторых ускорителях заряженных частиц, в механизме ускорения Ферми и в ряде других процессов,

могут быть использованы для возбуждения устойчивых периодических движений макроскопических колебательных систем. Для этого исследуем энергетические соотношения, характеризующие взаимодействия заряженных частиц при однонаправленном движении [4].

Рассмотрим уравнение движения заряда  $q$ , массой  $m$  в направлении  $X$  в статистическом электрическом поле  $\varphi(X)$

$$m\ddot{x} = q \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (5)$$

Интегрируя это уравнение относительно скорости, получим

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - q\varphi(x) = const.$$

Это означает, что скорость заряда в точке  $X$  однозначно определяется потенциалом этой точки, а полная энергия равна константе.

При движении заряда в быстропеременных полях уравнение движения будет

$$m\ddot{x} = q \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}. \quad (6)$$

Умножим уравнение (6) на  $\frac{dx}{dt}$  и преобразуем его, прибавив и отняв от правой

части  $q \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = q \left( \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} \right) - q \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}. \quad (7)$$

В уравнении (7) величина, находящаяся в скобках, представляет полную производную от потенциала по времени. Изменение потенциальной энергии может быть представлено в виде :

$$q \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{d}{dt}(U), \quad (8)$$

тогда изменение полной энергии будет иметь вид :

$$\frac{d}{dt}(T + U) = q \frac{d\varphi(x,t)}{dt}, \quad (9)$$

где  $T$  и  $U$  – кинетическая и потенциальная энергия заряда соответственно.

Таким образом, при взаимодействии заряда с быстропеременным полем сумма кинетической и потенциальной энергии не остается постоянной, а происходит изменение энергии, которое может быть как положительным, так и отрицательным, то есть в процессе одиночного акта взаимодействия заряд либо отбирает энергию электрического поля на увеличение своей энергии, либо отдает часть своей энергии полю.

Величина и знак приращения энергии заряда определяются фазой влета (фазой переменного поля, характеризующей начальный момент взаимодействия заряда с переменным полем), скоростью влета и соотношением между временем пролета и периодом переменного поля.

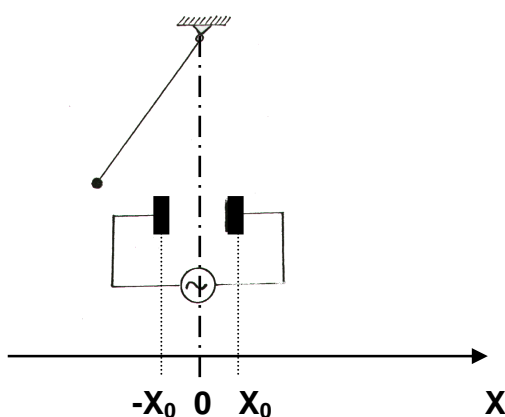
При взаимодействии большого количества зарядов вклад энергии может произойти из-за того, что ускоряется большее число электронов, чем тормозится. С другой стороны, вклад энергии происходит как результат уплотнения «пачки» электронов во времени. Однако, непосредственное использование этих процессов для вклада энергии при многократном пересечении зоны взаимодействия одним зарядом или его макроскопическим аналогом неприемлемо.

Для целого ряда устройств может быть использован механизм вклада энергии, основанный на том, что в процессе взаимодействия осуществлены условия, при которых один и тот же заряд многократно пересекает пространство взаимодействия (например, при вращении по кругу или при колебаниях) Причем пространство взаимодействия расположено на части траектории движения заряда и влет в зону взаимодействия происходит в те фазы переменного поля, которые обеспечивают положительный вклад энергии в его движение.

### 1.3. Основные модельные представления

**Энергетические соотношения для случая равновероятного распределения фаз, характеризующих начальный момент взаимодействия внешней силы с колебательной системой**

Пусть колеблющийся электрический заряд пересекает на части своего пути конденсаторный промежуток, к которому приложено синусоидальное переменное напряжение  $F_0 \cos \Omega t$  (Фиг. 2). При этом предполагаем, что стенки конденсатора идеально проницаемы для заряда, поле внутри конденсатора однородное и за стенками конденсатора на колеблющийся заряд поле не действует [8 - 11,16].



Фигура 2

**Модель взаимодействия колеблющегося заряда с переменным полем конденсаторного промежутка**

Предположим далее, что время пролета зарядом конденсаторного промежутка бесконечно мало по сравнению с периодом колебаний переменного поля. В этом случае можно считать, что движение заряда происходит при постоянном (равном мгновенному) значении переменного поля, то есть в сущности, в статическом поле.

При несоизмеримости частот собственных колебаний заряда и переменного напряжения, при равной вероятности влета во все фазы переменного напряжения очевидно, что суммарное приращение энергии за большое количество колебаний заряда будет равно нулю.

Если время пролета зарядом конденсаторного промежутка конечно, то есть сравнимо с периодом переменного напряжения, то поле, в котором движется заряд, уже нельзя считать статическим, так как за время пролета зарядом поля последнее изменяется. Однако, для случая, когда время пролета зарядом конденсаторного промежутка равно периоду колебаний переменного поля, изменения энергетического баланса колебаний заряда не следует ожидать, так как и в этом случае среднее значение вклада энергии за время пребывания заряда в конденсаторном промежутке будет равно нулю (заряд в течение первой половины периода ускоряется, а в течение второй половины периода тормозится).

Перед нами встал вопрос : может ли, при несоизмеримости частот собственных колебаний заряда и переменного напряжения для случая конечного времени пролета зоны взаимодействия, происходить вклад энергии переменного поля в колебания заряда и каковы условия воспроизведения таких колебательных процессов?

Рассмотрим случай, когда невозмущенное время пролета  $\tau_0 = 3/4T$  ( $T$  – период переменного поля) и поле в конденсаторном промежутке очень слабое. Для такого случая, в зависимости от фазы влета заряда в конденсаторный промежуток на него будут действовать разные по величине и направлению силы.

Пусть начальная фаза влета равна нулю ( $\varphi = 0$ ). Тогда за первую половину периода заряд будет ускоряться полем, а за последующую четверть периода – тормозиться. В результате однократного пролета с такой начальной фазой имеем преимущественное ускорение заряда полем.

При влете с отрицательной фазой ( $\varphi = \pi$ ) за первую половину периода заряд будет тормозиться полем, а за последующую четверть периода – ускоряться. В результате однократного пролета с такой начальной фазой имеем преимущественное торможение заряда.

Если время пролета зарядом конденсаторного промежутка не изменяется, то величины вклада энергии в обоих рассмотренных случаях одинаковы и противоположны. Такое же соотношение вклада энергии будет иметь место при рассмотрении любых пар начальных фаз влета  $\varphi$  и  $\varphi + \pi$ . Следовательно, при неизменном времени пролета  $\tau = \tau_0$  суммарный вклад энергии за большое число колебаний окажется равным нулю.

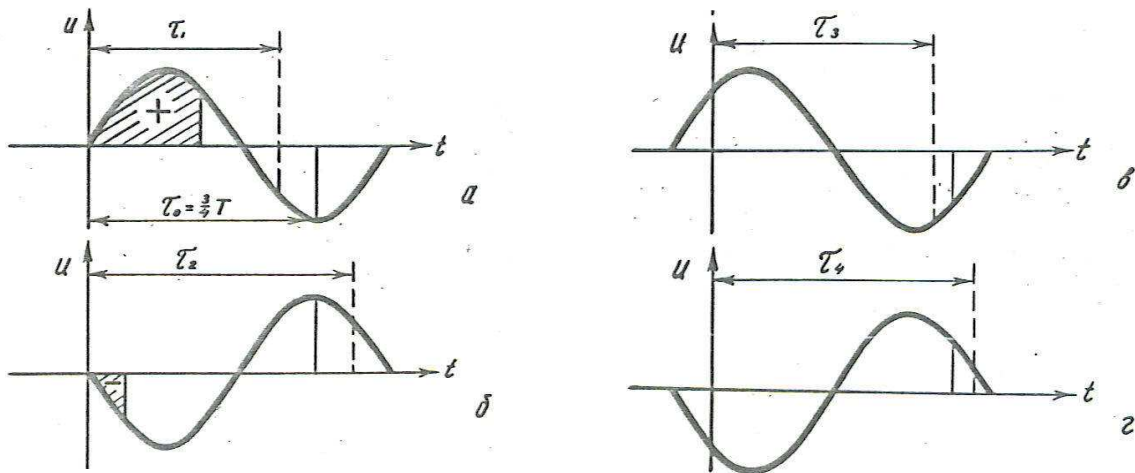
Рассмотрим случай, когда амплитуда поля конденсаторного промежутка достаточно велика, чтобы легкий заряд изменял реальное время движения в конденсаторном промежутке (см. Фиг. 3). В этом случае, при начальной фазе  $\varphi_1 = 0$  реальное время пролета  $\tau_1$  окажется меньше невозмущенного времени пролета  $\tau_0 = 3/4T$ . Поэтому вклад энергии в колебание заряда будет больше вклада, который имел место при соответствующем неизменном времени пролета. Положительный вклад энергии для этого случая пропорционален заштрихованной площади на Фиг. 3,а со знаком «плюс».



При начальной фазе  $\varphi_2 = \pi$  реальное время пролета увеличивается по сравнению с  $\varphi_1 = 0$ , что приводит к меньшему торможению заряда полем (Фиг. 3,б). Вклад энергии для этого случая пропорционален заштрихованной площади на Фиг. 3,б со знаком «минус»

Сопоставление энергетических соотношений для рассмотренной пары фаз влета приводит к выводу о результирующем положительном вкладе энергии за большое число колебаний заряда. Аналогично можно провести рассуждение для любых двух других, попарно взятых, пролетов с начальными фазами  $\varphi$  и  $\varphi + \pi$  (см. например, Фиг. 3,в,г).

Таким образом, можно утверждать, что при несоизмеримости частот колебательной системы и переменной внешней силы возможен положительный вклад энергии при том условии, что система изменяет время пролета через зону взаимодействия.



**Фигура 3**

**Диаграммы «энергия-фаза» для модели взаимодействия заряда с переменным полем конденсаторного промежутка**

Аналогичные рассуждения можно повторить для случая вращательного движения заряда на нерастяжимой нити вокруг неподвижной точки. В этом случае, если результирующий вклад энергии переменного поля будет компенсировать потери энергии системы на трение, реальному времени взаимодействия заряда с полем  $\tau \approx \frac{3}{4}T$  будет соответствовать устойчивый режим вращения заряда.

Совершенно очевидно, что указанные модельные представления справедливы и в том случае, когда начальные условия заданы, например, соотношением

$$\tau_n = T(n + \frac{3}{4}), \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

В этом случае каждому значению  $n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) будет соответствовать устойчивый режим колебаний (или вращений) заряда. Следовательно, в такой системе следует ожидать возможность возбуждения периодических движений (колебаний или вращений) с дискретным рядом  $n$  устойчивых амплитуд (скоростей).

Определим среднюю величину вклада энергии внешней силы в колебательный процесс за один период колебания маятника (заряда, Фиг. 2) в предположении равновероятности влета заряда во все фазы воздействующей гармонической силы (см. Фиг. 3) [4].

Введем ряд упрощающих предположений:

- энергия взаимодействия идет на поддержание установившегося колебательного процесса со стационарной амплитудой;
- в зоне взаимодействия заряд движется прямолинейно;
- при отсутствии силы заряд движется в зоне взаимодействия равномерно.

Пусть пространство взаимодействия расположено симметрично относительно положения равновесия маятника и  $2X_0$  – длина пути в зоне взаимодействия – мала по сравнению с амплитудой колебаний маятника.

Направим ось  $Ox$  вдоль траектории внутри зоны взаимодействия и поместим начало координат в точку  $x = 0$ , характеризующую положение равновесия маятника (см. Фиг. 2). Тогда координатами точек входа и выхода из зоны взаимодействия будут соответственно  $x = -X_0$  и  $x = X_0$ .

При  $x < -X_0$  и при  $x > X_0$  сила на маятник (заряд) не действует, а при  $-X_0 \leq x \leq X_0$  она равна  $F_0 \cos \Omega t$ .

Дифференциальное уравнение, которым описывается движение маятника в интервале  $[-X_0, X_0]$ , может быть представлено в виде:

$$m\ddot{x} = F_0 \cos \Omega t \quad (10)$$

или

$$\ddot{x} = K \cos \Omega t, \quad K = \frac{F_0}{m}. \quad (11)$$

Далее приняты следующие обозначения :

$t_0$  – момент прохождения маятником точки  $x = -X_0$ ,

$t_1$  – момент прохождения точки  $x = X_0$  при отсутствии взаимодействия,

$v_0$  – скорость, с которой маятник влетает в зону взаимодействия,

$t_2$  – момент прохождения точки  $x = X_0$  при наличии взаимодействия маятника с силой и пусть

$$t_0 \leq t \leq t_2. \quad (12)$$

Тогда скорость маятника в интервале  $[-X_0, X_0]$  будет

$$\dot{x}(t) = v_0 + \int_{t_0}^t \ddot{x}(\theta) d\theta = v_0 + \frac{K}{\Omega} (\sin \Omega t - \sin \Omega t_0), \quad (13)$$

а координата маятника в момент  $t$

$$x(t) = \int_{t_0}^t \dot{x}(\theta) d\theta = v_0(t - t_0) + \frac{K}{\Omega^2} (\cos \Omega t_0 - \cos \Omega t) - \frac{K}{\Omega} (t - t_0) \cdot \sin \Omega t_0. \quad (14)$$

Энергия, получаемая маятником при прохождении через зону взаимодействия, определяется при сделанных выше предположениях как разность кинетической энергии маятника в точке  $x = X_0$  и кинетической энергии маятника в точке  $X = 0$  :

$$\Delta E = E_{x_0} - E_0 = \frac{mv_{x_0}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}, \quad (15)$$

где  $v_{x_0}$  – скорость заряда в точке  $x = X_0$ .

Из определения  $t_2$  следует, что

$$v_{x_0} = v(t_2). \quad (16)$$

Из уравнений (13) и (16) при  $t = t_2$  получаем

$$v_{x_0} = v(t_2) = v_0 + \frac{K}{\Omega} (\sin \Omega t_2 - \sin \Omega t_0). \quad (17)$$

В этом выражении для  $v_{x_0}$  есть неизвестная величина  $t_2$ .

Положив в уравнении (14)  $t = t_2$  и учитывая, что из определения  $t_2$  следует

$$x(t_2) = X_0 \quad (18)$$

получаем уравнение для определения  $t_2$

$$x_0 = x(t_2) = v(t_2 - t_0) + \frac{K}{\Omega^2} (\cos \Omega t_0 - \cos \Omega t_2) - \frac{K}{\Omega} (t_2 - t_0) \sin \Omega t_0. \quad (19)$$

Произведя в уравнении (19) замену  $t_2 = t_1 + \Delta t$  и разлагая функции от  $\Omega \Delta t$  в ряды, при условии  $|\Omega \Delta t| \ll 1$  отбрасываем члены порядка малости  $(\Omega \Delta t)^2$  и выше, получаем выражение для определения  $t_2$  в явном виде с точностью, зависящей от степени малости величины  $\Omega \Delta t$ :

$$\Omega \Delta t = \frac{\frac{K}{\Omega v_0} \left[ \Omega t \sin \Omega t_0 - 2 \sin \frac{\Omega \tau}{2} \sin \Omega \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \right]}{1 + \frac{K}{\Omega v_0} 2 \sin \frac{\Omega \tau}{2} \cos \Omega \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right)}, \quad (20)$$

где  $\tau = t_1 - t_0$ ,  $t_1 - t_0 \cong 2X_0/v_0$  или  $2X_0 - v_0\tau = 0$ .

Анализ уравнения (20) показал, что для того, чтобы  $\Delta t$  удовлетворяло условию  $\Omega \Delta t \ll 1$ , достаточно чтобы выполнялось условие

$$\frac{4F_0x_0}{\frac{mv_0^2}{2}} \ll 1. \quad (21)$$

Условие (21) – это требование малости относительного прироста энергии, получаемой маятником в зоне  $[-X_0, X_0]$  взаимодействия.

Ограничимся рассмотрением систем, для которых выполняется неравенство (21).

Преобразуем уравнение (20), разложив второе слагаемое знаменателя в ряд и отбрасывая члены порядка малости  $(\Omega\Delta t)^2$  и выше, подставим полученное для  $\Delta t$  выражение в уравнение (17), а последнее – в (15). В результате указанных подстановок и преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{2E_0 K}{\Omega v_0} \left\{ 2 \sin \frac{\Omega \tau}{2} \cos \Omega \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{K}{\Omega v_0} \cos \Omega (t_0 + \tau) \times \right. \\ & \times \left[ \Omega \tau \sin \Omega t_0 - 2 \sin \frac{\Omega \tau}{2} \sin \Omega \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \right] \left. \right\} + E_0 \left( \frac{K}{\Omega v_0} \right)^2 \times \\ & \times \left\{ 2 \sin \frac{\Omega \tau}{2} \cos \Omega \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{K}{\Omega v_0} \cos \Omega (t_0 + \tau) \left[ \Omega \tau \sin \Omega t_0 + 2 \sin \frac{\Omega \tau}{2} \sin \Omega \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Разделив обе части уравнения (22) на  $E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ , получаем уравнение, которое определяет относительное изменение энергии маятника как функцию, зависящую от силы  $F_0 \cos \Omega t$ , времени  $\tau \cong 2x_0/v_0$  и от  $t_0$ , характеризующего начальный момент взаимодействия маятника с силой, то есть начальную фазу взаимодействия.

Изменение энергии маятника в среднем за полупериод его колебаний в предположении равновероятного распределения фаз влета в зону взаимодействия имеет вид

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \left( \frac{F_0 2x_0}{E_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{\sin \frac{\Omega x_0}{v_0}}{\frac{\Omega x_0}{v_0}} \right)^2 - \left( \frac{\sin \frac{2\Omega x_0}{v_0}}{\frac{2\Omega x_0}{v_0}} \right) \right]. \quad (23)$$

Из уравнения (23) следует, что в среднем за один полупериод колебаний маятник будет получать в зоне взаимодействия с внешней гармонической силой положительную добавку энергии.

Полученные результаты не являются принципиально новыми с точки зрения процессов, имеющих место при взаимодействии потоков заряженных частиц с переменным полем конденсаторного промежутка в приборах электроники СВЧ. Однако их получение для одночастичной задачи позволило сделать следующий шаг, заключающийся в переходе от модельных – чисто умозаключительных и агалоговых рассуждений к реальным макрофизическим системам.

### ***Развитие мысленной и аналоговой моделей.***

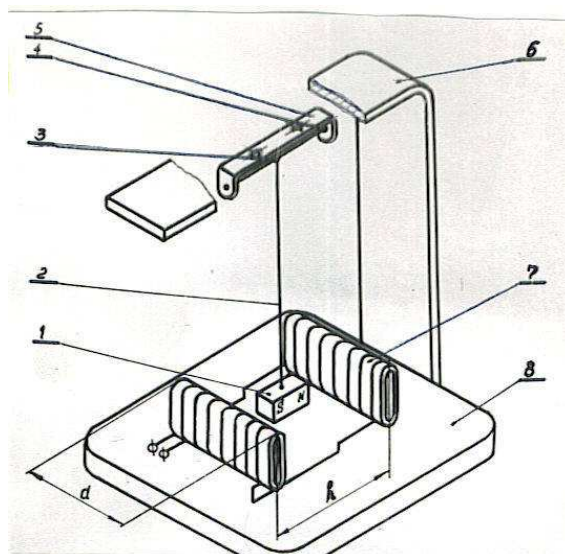
Макрофизическим аналогом рассмотренных взаимодействий единичного заряда с переменным полем конденсаторного промежутка является, например, взаимодействие постоянного магнита, являющегося частью физического маятника, с переменным полем соленоида (см. Фиг. 4).

Рассматриваемая система (Фиг.4) представляет собой маятник 1 - 2 с постоянным магнитом 1, полюса которого расположены перпендикулярно к нерастяжимой нити маятника 2. Верхний конец маятника закреплен в системе

подвеса 3-5, жестко связанной с каркасом 6, 8. Собственная частота малых свободных колебаний маятника 0,5 Гц, холостая добротность близка к 30.

Симметрично положению равновесия маятника на основании 8 установлены два одинаковых соленоида 7, питание которых осуществляется от сети переменного тока с частотой 50 Гц через реостат, способный регулировать амплитуду напряжения на соленоидах 7 в пределах от 15 до 250 В. Приведенная на Фиг. 4 конструкция устройства позволяет практически ограничить зону взаимодействия постоянного магнита 1 маятника с переменным электромагнитным полем соленоидов 7 размером  $d$ , характеризующим длину обмотки катушки соленоида. Предусмотрена также возможность питания соленоидов 7 от звукового генератора через усилитель.

Совершенно очевидно, что реальная макрофизическая система, представленная на Фиг. 4, идентична модели взаимодействия заряда с переменным полем конденсаторного промежутка (см. Фиг. 2).



**Фигура 4**

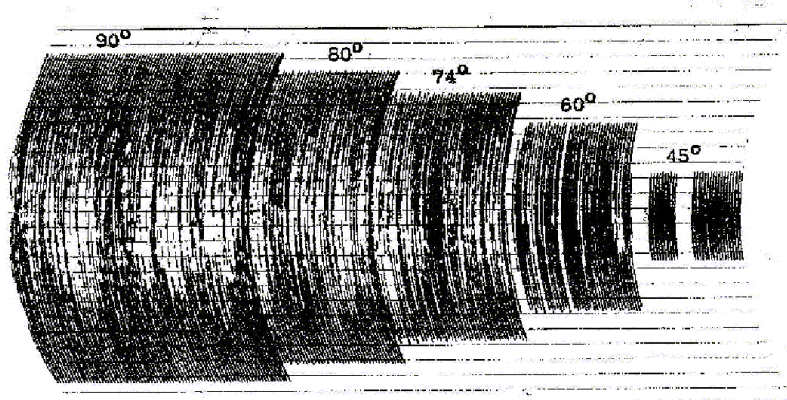
**Схема взаимодействия физического маятника с переменным полем соленоидов**

Испытания, проведенные на установке (Фиг. 4), показали, что при запуске маятника с начальными условиями, соответствующими амплитудам (отсчитываемым от положения равновесия маятника) 45°, 60°, 74°, 80°, 90° и напряжении на соленоидах 7, равном 30 В, имеют место устойчивые незатухающие колебания при всех фиксированных значениях параметров маятника 1-2 и источника питания. На Фиг. 5 представлены диаграммы указанных амплитуд колебаний маятника, записанные с помощью самописца.

Таким образом, было установлено, что в реальной макрофизической системе возможна реализация принципов взаимодействия, считавшихся приемлемыми только для ускорения (торможения) микрофизических объектов – заряженных частиц. При этом вклад энергии переменного поля способен компенсировать потери на трение уже не легкого заряда, а макросистемы, у которой они весьма значительны.

В результате экспериментов на установке, схема которой представлена на Фиг. 4, были получены следующие результаты :

- плавное (или скачкообразное) изменение амплитуды напряжения на соленоидах 7 в пределах от 15 до 250 В, при других неизменных параметрах источника питания и маятника, практически не приводит к изменению установившихся значений амплитуды и частоты колебаний последнего ;
- одни и те же устойчивые значения дискретных квантованных амплитуд (и частот, близких к собственной частоте) колебаний маятника возбуждались разными значениями частот источника питания (так, например, амплитуды маятника  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $74^\circ$  возбуждались при частоте питания соленоида 30 Гц, 50 Гц, 100 Гц, 1000 Гц и т.д. Для этого в качестве источника питания использовался генератор-синтезатор с усилителем. Таким образом, имело место возбуждение устойчивых дискретных амплитуд колебаний маятника на частоте близкой к его собственной, в то время как частота воздействующей силы может в десятки и сотни раз превышать частоту установившихся в системе колебаний ;
- при изменении в широких пределах, как амплитуды воздействующей силы, так и добротности маятника (что осуществлялось за счет более плотного зажима оси вращения маятника в подшипниках системы подвеса) последний поглощает практически одну и ту же порцию энергии, осуществляя саморегулирование вклада энергии в колебательный процесс ;
- при амплитуде напряжения, подаваемой на соленоиды, ниже 12 В не возбуждаются устойчивые колебания маятника ни на одной из возможных (указанных выше) амплитуд, то есть существует минимальное пороговое значение амплитуды питающего напряжения, ниже которого указанные выше свойства не реализуются ;
- если создать условия, чтобы магнит мог совершать вращательные движения вокруг оси подвеса, то имеют место устойчивые режимы вращения маятника с рядом дискретных скоростей, характеризующиеся всеми вышеперечисленными свойствами ;



Фиг. 12

### Фигура 5

Диаграмма распределения амплитуд колебаний физического маятника

- при питании индуктивных катушек 7 (см. Фиг. 4) от генераторов как гармонической, так и прямоугольной, треугольной или трапециевидной формы, возбуждаемые в системе устойчивые колебания маятника реализовывались со всеми, перечисленными выше, свойствами. Таким образом, форма воздействующего на колебательную систему непрерывного сигнала не имела принципиального значения.

### **Случай стационарной фазы**

Как и в предыдущем подразделе будем рассматривать колебания нелинейного маятника под действием нелинейной по координате гармонической силы (см. схемн на Фиг. 2).

Для такой системы проведем исследование условий, при которых в ней возможен стационарный колебательный режим, в предположении, что фаза внешней силы в момент влета маятника (заряда) в зону взаимодействия имеет постоянное значение\* и определяется такими энергетическими соотношениями, при которых поступающая в систему энергия равна потерям энергии маятника на трение за каждый период (полупериод) его колебаний.

Будем называть такую стационарную фазу резонансной фазой ( $\varphi_p$ ), а энергию, которую получает маятник при взаимодействии с внешней силой при этом значении фазы – резонансной энергией маятника ( $W_p$ ).

Введем ряд упрощающих предположений:

- зона взаимодействия расположена симметрично относительно положения равновесия маятника (см. Фиг. 2), начало координат (точка отсчета) помещено в точку 0, характеризующую положение равновесия маятника, так что точкой входа маятника в зону взаимодействия будет  $X = -X_0$ , а выхода  $X = X_0$ ;
- интервал  $[-X_0, X_0]$ , определяющий путь движения маятника в зоне взаимодействия, мал по сравнению с амплитудой колебания маятника;
- в следствие малости интервала  $[-X_0, X_0]$ , движение маятника в зоне взаимодействия можно считать прямолинейным и равномерным со скоростью приблизительно равной  $a\omega$ , где  $a$  – амплитуда колебаний маятника,  $\omega$  – его частота;
- потери на трение и изменение энергии в зоне взаимодействия за один период (полупериод) колебания маятника являются величинами одного и того же порядка и малы по сравнению с полной энергией маятника;
- при определении времени пролета маятником (зарядом) зоны взаимодействия пренебрегаем изменением скорости в этой зоне и считаем время пролета  $\tau$  зависящим только от скорости  $v_0$  влета маятника в зону взаимодействия и от длины зоны  $2X_0$ , то есть

$$\tau \approx \frac{2X_0}{v_0}$$

---

\* В данном случае речь идет о таких значениях фазы внешней силы, которые имеют место при движении маятника в одном направлении, например, справа налево или слева направо.

В этом случае энергия  $\delta W$ , получаемая маятником при прохождении зоны взаимодействия, определяется следующим образом :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^d E \sin(\Omega t + \varphi_0) dx = E \int_0^{\tau} \sin(\Omega t + \varphi_0) v_0 dt = \\ &= \frac{v_0 E}{\Omega} \int_0^{\tau} \sin(\Omega t + \varphi_0) dt = E_1 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$E_1 = 2 \frac{v_0 E}{\Omega} \sin \frac{\Omega \tau}{2}, \quad (25)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\Omega \tau}{2}, \quad (26)$$

$\varphi_0$  – значение фазы внешней силы в начальный момент запуска маятника.

Как видно из выражения (24), величина  $\delta W$  периодична по  $\omega t$  с периодом  $2\pi$ ; поэтому в выражениях (25) и (26) вместо  $\omega t + 2\pi$  будем подставлять  $\omega t$ . В этом случае  $E_1 \geq 0$ .

Для возбуждения устойчивых колебаний маятника необходимо, чтобы потери энергии на трение  $W_{тр}$  компенсировались энергией  $\delta W$ , получаемой маятником в зоне взаимодействия, то есть

$$\delta W = E_1 \sin \varphi = W_{тр}. \quad (27)$$

Одним из условий реализации стационарного режима колебаний маятника с точки зрения фазовых соотношений является неизменность фазы внешней силы в момент влета маятника в зону взаимодействия (в данном случае речь идет о фазах влета при движении маятника в одну сторону : слева направо или справа налево). Для выполнения этого условия достаточно, чтобы маятник приходил к границе зоны взаимодействия через время, кратное периоду внешней силы, то есть чтобы период маятника  $T_\omega$  в стационарном режиме был кратен периоду  $T_\Omega$  внешней силы :

$$\frac{T_\omega}{T_\Omega} = \frac{\Omega}{\omega} = k \quad (k=1,2,3...). \quad (28)$$

Как указывалось выше, выполнение условия (28) обеспечивает постоянство фазы влета в случае, когда внешняя сила действует на маятник при прохождении зоны взаимодействия в одном направлении: слева–направо или справа–налево.

В случае, когда внешняя сила действует на маятник при его движении через зону взаимодействия в обоих направлениях, нужно чтобы фазы внешней силы в момент влета маятника в зону взаимодействия в двух последовательных циклах отличалась на  $\pi$ . Это условие выполняется тогда, когда цикл, включающий время от момента влета в зону взаимодействия при движении в



одну сторону до момента влета в нее при движении в противоположную сторону, содержит в себе нечетное число полупериодов внешней силы. Так как из определения понятия цикла следует, что время цикла равно полупериоду колебаний маятника, то выражение (28) примет вид :

$$\frac{T_{\omega}}{T_{\Omega}} = k = 2n + 1 \quad (n=0,1,2,3\dots). \quad (29)$$

Так как исследуемый маятник существенно нелинеен, то период маятника зависит от его амплитуды колебаний или (что то же самое) от его полной энергии. Следовательно, из условия кратности периодов (29) следует условие дискретности значений амплитуд устойчивых колебаний маятника. Для определения этих значений можно воспользоваться известной зависимостью периода колебаний маятника  $T_{\omega}$  от его амплитуды  $a$  [7]

$$T_{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{a}{4} + \dots \right]. \quad (30)$$

Если ограничиться областью амплитуд, для которых

$$\sin \frac{a}{2} \cong \frac{a}{2}, \quad (31)$$

то можно ограничиться в выражении (30) первыми двумя членами и считать, что

$$T_{\omega}^2 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left( 1 + \frac{a^2}{16} \right) = T_0^2 \left( 1 + \frac{a^2}{16} \right), \quad (32)$$

где  $T_0$  – период малых свободных колебаний невозмущенного маятника,  $\ell$  – длина маятника.

Подставляя (30) или (32) в уравнение (28), получим уравнение для значений амплитуд, обеспечивающих кратность (29) периода колебаний маятника периоду воздействующей на него силы.

Так, например, пользуясь уравнением (32), получим, что если отношение  $\frac{T_{\omega}}{T_{\Omega}} = 100$ , то  $a \approx 0,4$  рад обеспечивает кратность  $k = \frac{T_{\omega}}{T_{\Omega}} = 101$ , а  $a \approx 0,7$  рад обеспечивает  $k = 103$  и т.д.

Выбрав одну из амплитуд, обеспечивающих кратность периодов и постоянство фазы, можно определить потери маятника на трение и с помощью уравнения (27) определить значение фазы, обеспечивающее компенсацию потерь энергии на трение.

Таким образом, если маятник отклонен на угол  $a$ , обеспечивающий выполнение условия кратности периодов (29), и запущен с нулевой скоростью в момент времени, обеспечивающий такую фазу влета в зону взаимодействия, что действие внешней силы на маятник компенсирует его потери энергии на трение, то будут обеспечены условия возбуждения его устойчивых незатухающих колебаний.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания такого маятника, может быть представлено в виде

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + K \sin x = F_0 \varepsilon(x) \sin(\Omega t + \varphi_0)$$

или

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = E\varepsilon(x) \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad (33)$$

где ,

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq X_0 \\ 0, & \text{если } |x| > X_0 \end{cases} \quad (34)$$

$\beta$  – коэффициент, характеризующий потери энергии маятника на трение  $\left(\beta = \frac{\lambda}{m}\right)$ ,

$\omega_0$  – собственная частота малых колебаний невозмущенного маятника  $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}\right)$ .

### **Исследование фазовых соотношений при возбуждении колебаний систем нелинейной по координате периодической силой**

Для анализа всех возможных движений в системе с одной степенью свободы в большинстве случаев используют метод «фазовой плоскости». Как было показано А.А. Андроновым и А.А. Виттом [30], метод фазовой плоскости является мощным средством исследования линейных и нелинейных колебательных систем.

Суть этого метода заключается в следующем. Представим себе декартовую плоскость  $(X, Y)$ , где по оси абсцисс откладывается координата движения массы  $X$ , а по оси ординат – соответствующая этой координате скорость  $\dot{X} = Y$ . Точка с координатами  $X(t)$  и  $Y(t)$  называется изображающей точкой. Из дифференциального уравнения движения системы получают уравнение, связывающее непосредственно  $X$  и  $Y$ , которое называют уравнением интегральной кривой на фазовой плоскости (по этой кривой движется со временем изображающая точка). Интегральную кривую иногда называют фазовой траекторией.

Аналогично методу «фазовой плоскости» исследуем движение изображающей точки на декартовой плоскости  $(\Delta W, \Delta\varphi)$  и выведем уравнение, связывающее эти две величины (здесь  $\Delta W$  – величина, характеризующая отклонение энергии маятника от ее резонансного значения  $W_p$ ,  $\Delta\varphi$  – аналогичное отклонение фазы от ее резонансного значения  $\varphi_p$ ).

Переход от координат  $(X, Y)$  к  $(\Delta W, \Delta\varphi)$  обусловлен тем, что классическая трактовка метода фазовой плоскости позволяет рассмотрение лишь таких систем, для которых задание любых произвольных начальных значений координаты и скорости однозначно определяет весь дальнейший процесс: решение исходного дифференциального уравнения – единственное для данных начальных значений\*. Как было показано в предыдущем подразделе настоящего параграфа, задание любых произвольных начальных значений координаты и скорости неоднозначно определяет весь дальнейший процесс исследуемых нами систем – в этих системах может иметь место наличие

дискретного ряда устойчивых амплитуд колебаний при неизменных параметрах системы и воздействующей силы.

Сделаем ряд предварительных замечаний :

1. Амплитуда колебаний маятника  $a$  определяет его энергию

$$W = mgl(1 - \cos a) . \quad (35)$$

2. В предположении (31) условие (35) может быть представлено в виде :

$$W = mgl \frac{a^2}{2} . \quad (36)$$

3. Для небольших амплитуд колебаний маятника зависимость периода его колебаний от полной энергии согласно (36) и (32) может быть представлена в виде

$$T_{\omega} = T_0 \left( 1 + \frac{W}{8mgl} \right) . \quad (37)$$

Рассмотрим два одинаковых маятника. Пусть один из них находится в состоянии резонансного возбуждения, а другой (назовем его возмущенным маятником) имеет значения фазы и энергии незначительно отличившиеся от резонансных. Обозначим разность энергий маятников через

$$\Delta W = W - W_p . \quad (38)$$

Считая, что период исследуемых диссипативных маятников определяется выражением (37), получим

$$T_{\omega, p} = T_0 \left( 1 + \frac{W}{8mgl} \right) \quad (39)$$

и

$$T_{\omega} = T_0 \left( 1 + \frac{W_p + \Delta W}{8mgl} \right) . \quad (40)$$

Отклонение периодов маятника друг от друга, очевидно, может быть определено из соотношения

$$\Delta T = T_0 \frac{\Delta W}{8mgl} . \quad (41)$$

Отклонение периода  $\Delta T$  возмущенного маятника от периода резонансного маятника приведет к тому, что фаза влета возмущенного маятника будет отличаться от резонансной фазы  $\varphi_p$  на величину  $\Delta\varphi$ . Скорость изменения фазы влета (изменение фазы влета за один цикл) определяется из выражения

$$\frac{d\Delta\varphi}{dv} = \Omega \Delta T = \frac{\Omega T_0}{8mgl} \Delta W . \quad (42)$$

---

\* Если, конечно, функции, входящие в уравнение, удовлетворяют условиям Коши-Липшица

Отличие фазы влета от резонансного значения в свою очередь вызовет изменение вклада энергии в зоне взаимодействия, кроме того потери маятника на трение за один цикл колебаний зависят от энергии маятника и в первом приближении, как и для линейного маятника, пропорциональны ей, то есть

$$W_{\text{тр}} = bW, \quad (43)$$

где  $b$  – коэффициент, характеризующий затухание маятника

$$b = \beta T_0. \quad (44)$$

Таким образом, поскольку скорость изменения отклонения энергии от резонансного значения определяется изменением энергии за 1 цикл, получим с учетом (24) – (27)

$$\frac{d\Delta W}{d\nu} = E_1 \sin \varphi = \delta W - bW = \delta W - b(W_p + \Delta W) = \delta W - bW_p - b\Delta W.$$

Учитывая, что  $bW_p = \delta W_p$ , из предыдущего выражения получим

$$\frac{d\Delta W}{d\nu} = E_1 \sin \varphi - E_1 \sin \varphi_p - b\Delta W. \quad (45)$$

Уравнение (42) и (45) определяют движение изображающей точки в координатах  $(\Delta W, \Delta \varphi)$  во времени, которое входит в эти уравнения через посредство  $\nu$ , обозначающего число циклов или номер цикла. Эти уравнения являются уравнениями в конечных разностях, но при малых изменениях фазы и энергии на каждом цикле конечные приращения могут быть заменены их дифференциалами, что упрощает получение правильной качественной картины поведения возмущенного маятника и не приводит к существенным ошибкам в расчетах. Исходя из этого и учитывая, что

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\nu} = \frac{d}{dt} T_\omega \approx T_0 \frac{d}{dt}, \quad (46)$$

перепишем уравнения (42) и (45) в виде

$$\frac{d\Delta \varphi}{dt} = \frac{\Omega}{8mgl} \Delta W, \quad (47)$$

$$\frac{d\Delta W}{dt} = \frac{E_1}{T_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_p) - \frac{b}{T_0} \Delta W. \quad (48)$$

Продифференцируем уравнение (47) по  $t$  и, сделав подставку (48), получим

$$\frac{d^2 \Delta \varphi}{dt^2} = \frac{\Omega}{8mgl} \frac{E_1}{T_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_p) - \frac{b}{T_0} \frac{d\Delta \varphi}{dt} \quad (49)$$

или

$$\frac{d^2 \Delta \varphi}{dt^2} + \frac{b}{T_0} \frac{d\Delta \varphi}{dt} - \frac{\Omega}{8mgl} \frac{E_1}{T_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_p) = 0. \quad (50)$$

Если фазу  $\varphi$  отсчитывать не так, как определено нами в уравнении (26), а со смещением на  $\pi$ , то для того же самого процесса мы получим в уравнении (50) перед третьим членом знак плюс. В этом случае уравнение (50) будет совпадать с уравнением движения математического маятника, к которому приложен постоянный внешний момент. Аналогия с указанным маятником указывает как на возможность наличия режима незатухающих колебаний относительно угла  $\varphi_p$ , характеризующего положение равновесия, так и режима неограниченного ухода  $\varphi$  от  $\varphi_p$ .

Рассмотрим малые колебания фазы возмущенного маятника; так как по определению  $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_p$ , то входящую в (50) разность синусов можно переписать в виде

$$\sin \varphi - \sin \varphi_p = \sin(\varphi_p + \Delta \varphi) - \sin \varphi_p = \sin \varphi_p \cos \Delta \varphi + \cos \varphi_p \sin \Delta \varphi - \sin \varphi_p;$$

при  $\Delta \varphi \ll 1$ :  $\sin \Delta \varphi \approx \Delta \varphi$ ,  $\cos \Delta \varphi \approx 1$  и

$$\sin \varphi - \sin \varphi_p = \Delta \varphi \cos \varphi_p. \quad (51)$$

Подставляя уравнение (51) в уравнение (50), получим

$$\frac{d^2 \Delta \varphi}{dt^2} + \frac{b}{T_0} \frac{d\Delta \varphi}{dt} - \frac{\Omega}{8mgl} \frac{E_1 \cos \varphi_p}{T_0} \Delta \varphi = 0. \quad (52)$$

В случае, когда  $\cos \varphi_p < 0$ , т.е.

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_p < \pi, \quad (53)$$

(50) совпадает с уравнением, описывающим колебания линейного маятника с линейным трением; при этом коэффициент его затухания равен  $\beta_\varphi = \frac{b}{T_0}$ , а частота колебаний такого линейного маятника определяется равенством

$$\omega_p^2 = \frac{\Omega E_1 \cos \varphi_p}{8mgl T_0}. \quad (54)$$

Подставляя в уравнение, определяющее коэффициент затухания  $\beta_\varphi$ , значение  $b = \beta T_0$ , из уравнения (44) получим

$$\beta_\varphi = \beta. \quad (55)$$

Рассмотрим ограничения, накладываемые равенством (53) на значения резонансной фазы  $\varphi_p$ . Из определения, данного выше, следует, что угол  $\varphi$  определяет количество энергии, получаемое маятником при прохождении зоны взаимодействия, которая в свою очередь определяется уравнением (27).

График зависимости  $\delta W$  от  $\varphi$  представлен на Фиг. 6. Из него видно, что уравнению (27) удовлетворяют два значения фаз влета  $\varphi'$  и  $\varphi''$ . Причем оба значения  $\varphi'$  и  $\varphi''$  компенсируют потери  $W_{тр}$  энергии на трение маятника. Однако, уравнение (52) имеет периодические решения только при условии  $\cos\varphi_p < 0$ , которому соответствует значение фазы влета  $\varphi''$ . При этом, в случае попадания фазы влета в область, лежащую между значениями  $\varphi'$  и  $\varphi''$ , значения фазы совершают затухающие колебания вокруг резонансного значения  $\varphi_p = \varphi''$ .

При рассмотрении колебаний величины  $\varphi$ , описываемых уравнением (50), методом «фазовой плоскости» в координатах  $(\Delta W, \Delta\varphi)$  мы получим из уравнения (47) и (48), что движение изображающей точки в координатах  $(\Delta W, \Delta\varphi)$  с точностью до константы совпадает с традиционной фазовой диаграммой для уравнения (50). Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться фазовыми диаграммами в координатах  $(\Delta W, \Delta\varphi)$  или, что более удобно, в координатах  $(W, \varphi)$ .

Определим «фазовый портрет» системы, описываемой уравнением (50) или системой уравнений (47) и (48). Для этого, пренебрегая в уравнении (50) членом при первой производной, проинтегрируем его и рассмотрим семейство кривых, разделяющих различные области фазовой плоскости; затем проведем уточнение, учитывая влияние члена, определяющего затухание.

Отбрасывая член, содержащий затухание, и разделив уравнение (48) на (47), получим

$$\frac{d\Delta W}{d\Delta\varphi} = \frac{E_1}{T_0} \frac{8mgl}{\Omega} \frac{\sin\varphi - \sin\varphi_p}{\Delta W}. \quad (56)$$

Умножим обе части уравнения (56) на  $\Delta W d(\Delta\varphi)$  и проинтегрируем его:

$$(\Delta W)^2 = -\frac{E_1}{T_0} \frac{8mgl}{\Omega} (\cos\varphi + \varphi \sin\varphi_p) + C. \quad (57)$$

Полученное уравнение (57) определяет семейство интегральных кривых на плоскости  $(\varphi, W)$ . Вблизи резонансной точки  $(\varphi_p, W_p)$  получаем разложением  $\cos\varphi$  до членов второго порядка малости по  $\Delta\varphi$  уравнение

$$(\Delta W)^2 - (\Delta\varphi)^2 \cos\varphi_p \frac{E_1 8mgl}{T_0 \Omega} = C_1, \quad (58)$$

которое является уравнением семейства эллипсов, если  $\cos\varphi_p < 0$ .

Для построения фазовой диаграммы воспользуемся правой, потенциальной частью интеграла (57). Ее график представлен на Фиг. 7. Кривая  $z = \cos\varphi + \varphi \sin\varphi_p$  имеет максимум в точке  $\pi - \varphi_p$ , а минимум – в точке  $\varphi_p$ , или в обозначениях Рис. 1.6. в точках  $\varphi'$  и  $\varphi''$  соответственно.

Экстремальные точки кривой на Фиг. 7,а дают три точки для построения сепаратриссы, которая представлена на Фиг. 7б. Тот факт, что точка  $\pi - \varphi_p$  является граничной точкой области устойчивости по фазе  $\varphi$ , имеет следующий физический смысл: точка на оси  $W = W_p$ , лежащая несколько правее точки  $\pi -$

$\varphi_p$  (точка  $\varphi'$  на Фиг. 6), обеспечивает положительный прирост энергии, а точка, лежащая слева от точки  $\varphi'$ , даст отрицательный прирост энергии, что приведет к уходу фазы влево. Точка  $(0, \pi - \varphi_p)$  на плоскости  $(\varphi, W)$ , принадлежащая сепаратриссе, позволяет определить уравнение, описывающее эту сепаратрису:

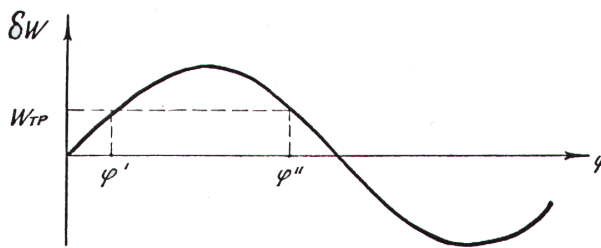
$$0 = -\frac{E_1}{T_0} \frac{8mgl}{\Omega} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi_p) + C, \quad (59)$$

из которого

$$C = \frac{E_1}{T_0} \frac{8mgl}{\Omega} (-\cos \varphi + (\pi - \varphi_p) \sin \varphi_p) \quad (60)$$

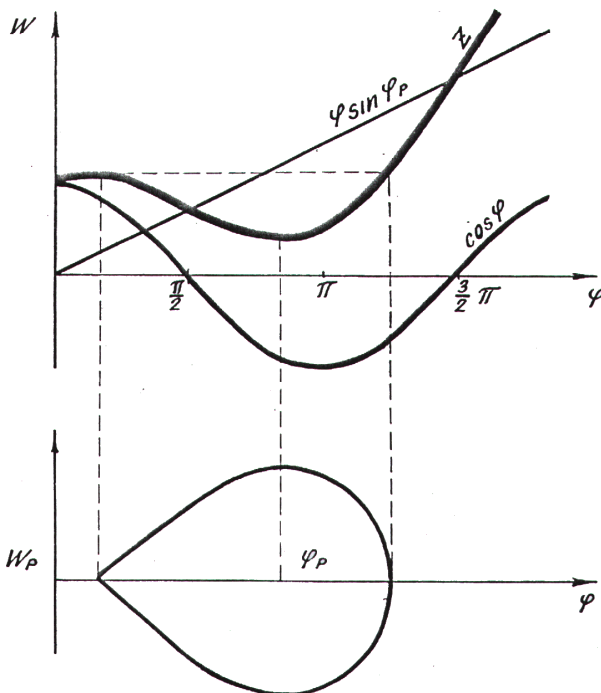
и

$$(\Delta W)^2 = -\frac{E_1}{T_0} \frac{8mgl}{\Omega} [\cos \varphi + \varphi \sin \varphi_p + \cos \varphi_p - (\pi - \varphi_p) \sin \varphi_p]. \quad (61)$$



**Фигура 6**

Диаграмма, задающая границы области устойчивых значений фаз и энергий

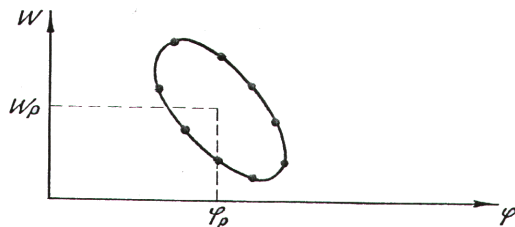
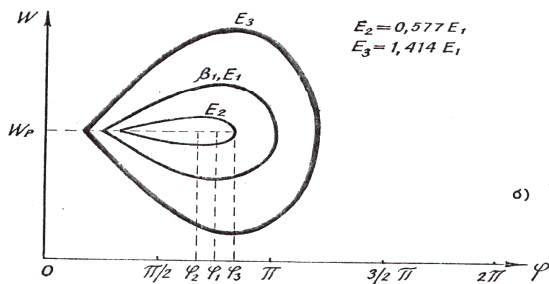
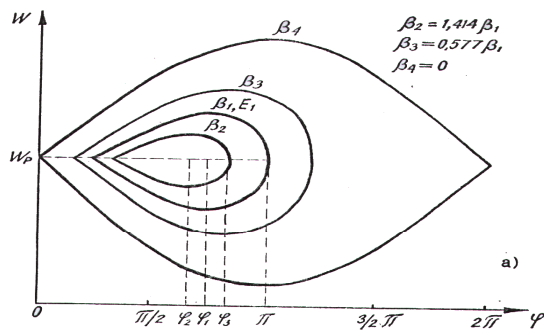


**Фигура 7**

Фазовая диаграмма, характеризующая области устойчивых значений фаз и энергий

На Фиг. 8 изображены сепаратриссы, полученные с помощью уравнения (61). Сепаратриссы на Фиг. 8,а соответствуют различным значениям коэффициента затухания при остальных неизменных параметрах системы. Для случая трения, равного нулю, значение резонансной фазы  $\varphi_p = \pi$ , а в крайних левой и правой точках - фаза соответственно имеет значения 0 и  $2\pi$ .

На Фиг. 8,б дано семейство сепаратрисс для различных значений амплитуды воздействующей силы при остальных неизменных параметрах системы.



**Фигура 8**

**Семейство сепаратрисс, определяющее устойчивые значения фаз и энергий :**  
**а) для различных значений диссипативных потерь энергии маятника,**  
**б) для различных значений амплитуд силы.**

**Фигура 9**

**Диаграмма, представляющая устойчивые значения энергии и фазы для случая консервативного маятника ( $\beta = 0$ )**

График сепаратриссы, построенный для случая консервативного маятника, то есть когда  $\beta = 0$ , представлен на Фиг. 9..

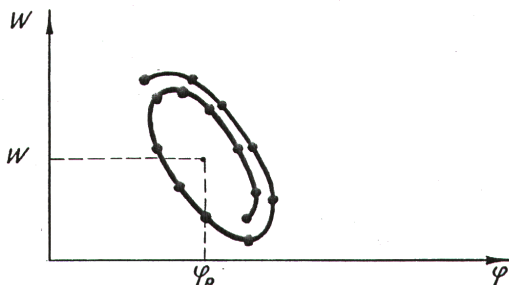
Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее изменение фазы для вышерассмотренного колебательного процесса, может быть записано с учетом соотношений (52) – (55) в виде

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_{\varphi}^2(\sin \varphi - \sin \varphi_p) = 0. \quad (62)$$

При небольших отклонениях фазы от резонансного значения решение уравнения (62) устойчиво. При отсутствии трения у маятника ( $\varphi_p = \pi$ ) в случае, близком к резонансному, изображающая точка в координатах  $(W_p, \varphi_p)$  движется практически по эллипсу (Фиг. 9). При наличии трения изображающая точка движется по спирали к резонансному значению  $(W_p, \varphi_p)$  (см. Фиг. 10).

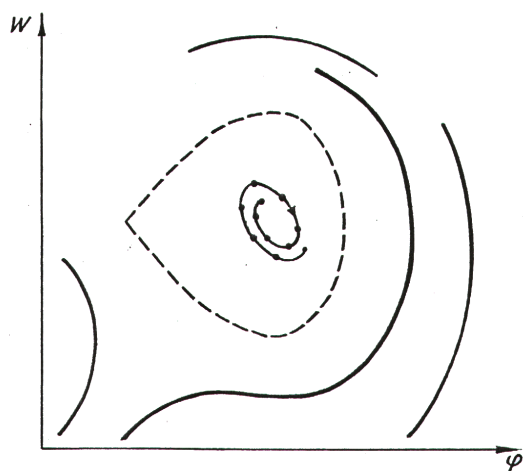


Анализ нелинейного уравнения (62) позволяет определить границы области устойчивости колебаний маятника (Фиг. 11). При флуктуациях фазы, амплитуды или других параметров системы, приводящих к отклонению изображающей точки от резонансного значения, но не выводящих ее за границы области устойчивости, очерченной сепаратриссой (на Фиг. 11 обозначена пунктирной



**Фигура 10**

**Диаграмма, характеризующая установление устойчивых значений фазы и энергии в случае неконсервативной колебательной системы ( $\beta \neq 0$ )**



**Фигура 11**

**Диаграмма, позволяющая определить границы области устойчивых значений фазы и энергии, обеспечивающих стационарные колебания маятника**

линей), не происходит срыва колебаний и значения энергии и фазы (изображающая точка) будут стремиться к резонансным. Если значения энергии и фазы таковы, что изображающая точка находится вне области, очерченной пунктирной сепаратриссой (Фиг. 11), то она удалится от области устойчивости и, в общем случае, маятник, рассеяв энергию, остановится.

Рассмотренные нами колебания фазы вокруг ее резонансного значения и затухание этих колебаний при наличии трения у маятника аналогичны синхронным (радиально-фазовым) колебаниям в ускорителях элементарных частиц, впервые рассмотренных Векслером [29] и имеют в основе один и тот же механизм, называемый «механизмом автофазировки».

Здесь следует обратить внимание на тот факт, что до настоящего времени понятие автофазировки применялось к описанию процессов при решении задач о движении больших групп элементарных частиц.

Применение этого понятия и раскрытие его содержания при исследовании макрофизических систем в условиях одночастичной задачи было сделано нами впервые и имеет свою специфику.

Проведенные выше рассуждения дают нам качественную картину установления колебаний в случае, когда выполняется условие (28).

## ВЫВОДЫ

Работа посвящена модельному обоснованию явления возбуждения аргументных колебаний.

Основанием для проведения этих исследований явилось изучение с позиций теории колебаний известных в технике ускорения заряженных частиц, электронике СВЧ, механике, оптике и акустике процессов и явлений, основанных на использовании инерционных свойств заряженных частиц. Выявленные при этом общие признаки и свойства механизмов, обеспечивающих взаимодействие заряженных частиц с быстропеременными полями, позволили сформулировать новый, ранее не рассматривавшийся, механизм преобразования энергии внешней высокочастотной силы в собственные низкочастотные колебания макрофизических систем, а затем осуществить переход к построению сначала качественных и вслед за этим реальных действующих моделей и устройств.

Исследуемые качественные и реальные модели, реализующие механизм аргументного возбуждения колебаний, представлены простейшими колебательными системами с одной степенью свободы, на каждую из которых воздействует нелинейная по координате периодическая сила.

Основными отличительными признаками механизма аргументного возбуждения колебаний являются :

- возможность возбуждения собственных или близких к ним колебаний при воздействии на систему силы, частота которой может быть в десятки и сотни раз больше или меньше частоты возбуждаемых в системе колебаний ;
- возможность при определенном соотношении частот воздействующей силы и системы возбуждения колебаний квазисобственной частоты с множеством дискретных устойчивых амплитуд, зависящих только от начальных условий ;
- саморегулирование вклада энергии в колебательный процесс, выражающееся в стабильном поддержании значений амплитуды и частоты колебаний системы при изменении в широких пределах, как амплитуды воздействия, так и добротности колебательного звена ;
- наличие дискретного спектра частот воздействующей силы, способных возбудить устойчивые колебания системы с одними и теми же значениями амплитуд и частот.

Качественно процесс возбуждения незатухающих колебаний с множеством устойчивых амплитуд объясняется дискретным характером фазовых условий, благоприятных для возбуждения таких колебаний системы, что связано с наличием двух периодических процессов с определенным образом организованным взаимодействием между ними.

Простейшим типом стационарных колебаний обеспечивающих реализацию указанных выше свойств, являются колебания маятника, который на части своей траектории движения взаимодействует с внешней высокочастотной силой и за каждый полупериод собственных колебаний получает порцию энергии, равную энергии, диссипируемой в процессе свободного движения до возвращения к зоне взаимодействия. Для обеспечения стационарных колебаний простейшего рассматриваемого типа маятник должен подходить к зоне взаимодействия каждый раз при одной и той же фазе высокочастотной

вынуждающей силы, причем фазы вынуждающей силы при подходе маятника к зоне взаимодействия с разных сторон должны отличаться на  $k\pi$  ( $k = 1, 3, 5, \dots$ ).

Таким образом, стационарные колебания имеют место в случае, если отношение частоты вынуждающей силы к частоте колебаний маятника кратно целому нечетному числу. В случае, если это отношение велико, например, составляет 100 или более, разность между различными дискретными частотами возбуждаемых устойчивых колебаний системы становится малой величиной, вследствие чего можно говорить о возбуждении разных дискретных амплитуд колебаний маятника примерно на одной частоте.

Устойчивость дискретных стационарных колебаний при изменении амплитуды воздействия или диссипативности колебательного звена (или других внешних воздействиях) объясняется особенностью колебательной системы автоматически изменять фазовые условия взаимодействия (например, фазу влета в зону взаимодействия) в зависимости от величины полученной порции энергии.

Проведенные качественные исследования показали, что существуют конечные по ширине области начальных условий (например, условий влета маятника в зону взаимодействия с внешней высокочастотной силой), в пределах которых обеспечивается поддержание благоприятных фазовых соотношений и, следовательно, неизменность возбуждаемых колебаний, означающая, в частности, поддержание соответствующих устойчивых значений дискретных амплитуд.

Исследование эвристических моделей с различными вариантами задаваемых условий фазовых и энергетических соотношений, обеспечивающих режим поддержания устойчивых колебаний систем, позволило выявить основные принципы синхронизации различных по частоте колебательных процессов и организации их взаимодействия.

Результатом выполненных исследований явились формулировка нового возможного механизма возбуждения устойчивых колебаний систем с потенциально возможным дискретным рядом квантованных амплитуд.

Исследования, описанные в настоящей работе предопредели в значительной степени направления дальнейших работ в области теоретического и экспериментального обоснования макрофизического квантового эффекта (МКЭД).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Студенков Е.М., Гидравлическая модель электронно-лучевых приборов типа «Клистрон». УФН, 29, вып. 1-2, 206, 1946.
2. Пеккер И.И., Физическое моделирование электромагнитных механизмов. Энергия, М., 1969.
3. Дубошинский Д.Б., Пеннер Д.И., Козаков М.И., Галкин Ю.В., Вермель А.С. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний. УФН, т.109, вып.2, 1973.
4. Дубошинский Д.Б. Об одной модели механизма ускорения Ферми. Сборник «Некоторые вопросы возбуждения незатухающих колебаний», вып. 2, Владимир, 1974. Стр. 87 – 133.

5. Barkhausen H., Kurz K. Die kurzesten, mit Vakuumrohren herstellbaren SchWingen., Phys. Zs., 21, № 1, 1920.
6. Ланда П.С., Дубошинский Я.Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии. УФН, т. 158, вып. 4, 1989
7. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н., Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР, Киев, 1950.
8. Гайдук В.И., Палатов К.И., Петров Д.М., Физические основы электроники сверхвысоких частот. Сов.радио, М., 1971.
9. Нейман М.С., Триодные и тетродные генераторы сверхвысоких частот. Сов.радио, М., 1950.
10. Грошковский Я., Генерирование высокочастотных колебаний и стабилизация частоты. ИЛ. 1953.
11. Коваленко В.Ф., Введение в электронику сверхвысоких частот. Сов.радио. М., 1950.
12. Вин М., О влиянии металла электродов искры на частоту электрических колебаний. Сб. Электрические колебания и волны. Вып.6, С-П. 1910.
13. Рожанский Д.А., Электрические лучи. С.-П.1913.
14. Коваленко В.Ф. История развития электронно-лучевых лоамп для микроволн. – известия АН СССР, серия физическая, том 4, № 3. 1940.
15. Арсеньева А.Н. (Heil A. Und Heil O.) Eine neue Methode Zur Erzeugung kurzer, ungedampfter, elektra magnetischer Wellen grosser ntensitat, Zeitschz. f. Phys, bd. 95, с. 752-762, 1935.
16. Капцов Н.А. Электроника. – М., ГИТТЛ, 1956.
17. Fermi E., Pasta Y., Ulam S. Studies of Nonlinear Problems, Office of Technical Services, LA – 1940.
18. Fermi E. Phys, Rev. 75, 1949/
19. Ulam S. Random processes and transformations, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Cambrige, 1950.
20. Ford K. Transfere of Energyfrom Astronomical Bodies to spece vehicles . T – Division Report, Los Alamos, 1959/
21. Чириков Б.В. Резонансные процессы в магнитных ловушках. Атомная энергия. № 6. 1959.
22. Ulam S. On same statistical properties of dynamical systems. Proc, 4-th, 3, 315, Los Angeles, 1961.
23. Заславский Г.М., Чириков Б.В. О механизме ускорения Ферми в одномерном случае. ДАН СССР, 159, 2, с.306, 1964.
24. Заславский Г.М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. Физматгиз. М., 1970.
25. Улам С.М. Нерешенные математические задачи, Наука, М., 1964.
26. Rocard Y. Dinamique generale des vibrations, Paris, Masson et Cie, 1943.
27. Minorsky N. On Parametria Excitation, Jour, Apple, Phisics, 1951.
28. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О явлениях резонансного рода. Собр.трудов. Т.2 – М., Изд-во АН СССР, 1947.
29. Векслер В.И. Новый метод ускорения релятивистских частиц ДАН СССР, 43, 346. 1944.
30. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э., Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.